

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Από το τόξο 2α στο τόξο α

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}$$

2.

Από το τόξο α στο τόξο 2α ή τύποι αποτετραγωνισμού

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Από το τόξο ω στο τόξο $\frac{\omega}{2}$

$$\eta\mu\omega = 2\eta\mu\frac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2} - \eta\mu^2\frac{\omega}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2} - 1$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\omega}{2}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{2\epsilon\varphi\frac{\omega}{2}}{1 - \epsilon\varphi^2\frac{\omega}{2}}$$

2.

Από το τόξο $\frac{\omega}{2}$ στο τόξο ω ή τύποι αποτετραγωνισμού

$$\eta\mu^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{2}$$

$$\epsilon\phi^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να εκφράσετε με ένα τριγωνομετρικό αριθμό τις παραστάσεις

i) $2\eta\mu 5\alpha \sigma\upsilon\nu 5\alpha$

ii) $1 - 2\eta\mu^2 4\alpha$

iii) $2\sigma\upsilon\nu^2 7\alpha$

Λύση

i)

$$2\eta\mu 5\alpha \sigma\upsilon\nu 5\alpha = \eta\mu(2 \cdot 5\alpha) = \eta\mu 10\alpha \quad (\text{θεωρούμε σαν } \alpha \text{ το } 5\alpha)$$

ii)

$$1 - 2\eta\mu^2 4\alpha = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 4\alpha) = \sigma\upsilon\nu 8\alpha \quad (\text{θεωρούμε σαν } \alpha \text{ το } 4\alpha)$$

iii)

$$2\sigma\upsilon\nu^2 7\alpha = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 7\alpha) = \sigma\upsilon\nu 14\alpha \quad (\text{θεωρούμε σαν } \alpha \text{ το } 7\alpha)$$

2.

Να εκφράσετε με ένα τριγωνομετρικό αριθμό τις παραστάσεις

i) $2\eta\mu\frac{3\alpha}{2}\csc\frac{3\alpha}{2}$

ii) $\frac{2\epsilon\varphi 4\alpha}{1-\epsilon\varphi^2 4\alpha}$

iii) $\csc^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$

Λύση

i)

$$2\eta\mu\frac{3\alpha}{2}\csc\frac{3\alpha}{2} = \eta\mu(2\cdot\frac{3\alpha}{2}) = \eta\mu 3\alpha$$

(θεωρούμε σαν α το $\frac{3\alpha}{2}$)

ii)

$$\frac{2\epsilon\varphi 4\alpha}{1-\epsilon\varphi^2 4\alpha} = \epsilon\varphi(2\cdot 4\alpha) = \epsilon\varphi 8\alpha$$

(θεωρούμε σαν α το 4α)

iii)

$$\csc^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2} = \csc(2\cdot\frac{\alpha}{2}) = \csc\alpha$$

(θεωρούμε σαν α το $\frac{\alpha}{2}$)

3.

Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \csc 4\alpha + \csc 2\alpha} = \epsilon\varphi 2\alpha$$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \csc 4\alpha + \csc 2\alpha} &= \frac{2\eta\mu 2\alpha \csc 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + 2\csc^2 2\alpha - 1 + \csc 2\alpha} \\ &= \frac{\eta\mu 2\alpha (\csc 2\alpha + 1)}{\csc 2\alpha (\csc 2\alpha + 1)} \\ &= \frac{\eta\mu 2\alpha}{\csc 2\alpha} = \epsilon\varphi 2\alpha \end{aligned}$$

Από 4α σε 2α

4.

Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha}{(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha}{(1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} &= \frac{2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha}{(1+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} \\ &= \frac{2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha (1+\sigma\upsilon\nu\alpha)} \\ &= \frac{2\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} \\ &= \frac{2(2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2})}{1+2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2}-1} \\ &= \frac{2(2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2})}{2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2}} \\ &= 2 \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}} = 2\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Από 2α σε α

Από α σε $\frac{\alpha}{2}$

5.

Δείξτε ότι $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha$

Λύση

$$\begin{aligned} \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\sigma\upsilon\nu\left[2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{2} - \frac{1-\sigma\upsilon\nu\left[2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{2} \\ &= \frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2} - \frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu \frac{\pi}{4} \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu \frac{\pi}{4} \eta\mu\alpha}{2} \\ &= \frac{2\eta\mu \frac{\pi}{4} \eta\mu\alpha}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{4} \eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \eta\mu\alpha \end{aligned}$$

Αποτετραγωνισμός

6.

Δείξτε ότι $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$

Λύση

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) &= \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} \\ &= \frac{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1+\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} \\ &= \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}\end{aligned}$$

7.

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 2x = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - 1$

Λύση

$$\eta\mu 2x = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} - 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 2 \cdot \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{2} - 1$$

$$2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x$$

$$2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu x (2\eta\mu x - 1) = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Το $2x$ σε x και
το $\frac{x}{2}$ σε x

8.Να λυθεί η εξίσωση β) $\sin 8x = \eta\mu 4x + 1$ **Λύση**

$$\sin 8x = \eta\mu 4x + 1 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 4x = \eta\mu 4x + 1$$

$$\eta\mu 4x + 2\eta\mu^2 4x = 0$$

$$\eta\mu 4x(1 + 2\eta\mu 4x) = 0$$

$$\eta\mu 4x = 0 \quad \text{ή} \quad 1 + 2\eta\mu 4x = 0$$

$$\eta\mu 4x = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu 4x = -\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu 4x = \eta\mu 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu 4x = -\eta\mu \frac{\pi}{6}$$

$$4x = \kappa\pi \quad \text{ή} \quad \eta\mu 4x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = \frac{\kappa\pi}{4} \quad \text{ή} \quad 4x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad 4x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\kappa\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{\pi}{24} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{7\pi}{24}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Το $8x$ σε $4x$ **9.**Να λυθεί η εξίσωση $\sin 2x - 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1 = 0$ **Λύση**

$$\sin 2x - 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 - 2 \cdot \frac{1 + \sin x}{2} - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

Το $2x$ σε x Το $\frac{x}{2}$ σε x Θέτουμε $\sin x = y$, οπότε $2y^2 - y - 1 = 0$, η οποία έχει ρίζες

$$y = 1 \quad \text{ή} \quad y = -\frac{1}{2}$$

- Για $y = 1$ θα έχουμε $\sin x = 1$
 $\sin x = \sin 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

- Για $y = -\frac{1}{2}$ θα έχουμε $\sin x = -\frac{1}{2}$

$$\sin x = -\sin \frac{\pi}{3}$$

$$\sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

10.

Να λυθεί η εξίσωση $\sin^4 x + \eta\mu^4 x = 1$

Λύση

$$\sin^4 x + \eta\mu^4 x = 1 \Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + (\eta\mu^2 x)^2 = 1$$

Αποτετραγωνισμός

$$\left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sin 2x}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1+\sin^2 2x+2\sin 2x}{4} + \frac{1+\sin^2 2x-2\sin 2x}{4} = 1$$

$$2 + 2\sin^2 2x = 4$$

$$\sin^2 2x = 1$$

$$\sin 2x = 1 \quad \text{ή} \quad \sin 2x = -1$$

$$\sin 2x = \sin 0 \quad \text{ή} \quad \sin 2x = \sin \pi$$

$$2x = 2k\pi \quad \text{ή} \quad 2x = 2k\pi \pm \pi$$

$$x = k\pi \quad \text{ή} \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

11.

Να αποδείξετε ότι

i) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \frac{\sin \alpha - \eta\mu \alpha}{\sin \alpha + \eta\mu \alpha}$

ii) $\sigma\phi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\sin 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$

Λύση

i)

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \eta\mu^2 \alpha + 2\eta\mu \alpha \sin \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \eta\mu \alpha)(\sin \alpha + \eta\mu \alpha)}{(\sin \alpha + \eta\mu \alpha)^2} = \frac{\sin \alpha - \eta\mu \alpha}{\sin \alpha + \eta\mu \alpha}$$

Προσέξτε αυτή την ενέργεια

ii)

$$\begin{aligned} \sigma\phi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \frac{\sigma\phi \frac{\pi}{4} \sigma\phi \alpha - 1}{\sigma\phi \frac{\pi}{4} + \sigma\phi \alpha} \\ &= \frac{\sigma\phi \alpha - 1}{1 + \sigma\phi \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha} - 1}{1 + \frac{\sigma\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha}} \\
&= \frac{\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\alpha + \eta\mu\alpha} \stackrel{(i)}{=} \frac{\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha}{1 + \eta\mu^2\alpha}
\end{aligned}$$

12.

Δείξτε ότι $\frac{1 - \varepsilon\varphi^2(45^\circ - \alpha)}{1 + \varepsilon\varphi^2(45^\circ - \alpha)} = \eta\mu 2\alpha$

Λύση

$$\frac{1 - \varepsilon\varphi^2(45^\circ - \alpha)}{1 + \varepsilon\varphi^2(45^\circ - \alpha)} = \frac{1 - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu[2(45^\circ - \alpha)]}{1 + \sigma\upsilon\nu[2(45^\circ - \alpha)]}}{1 + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu[2(45^\circ - \alpha)]}{1 + \sigma\upsilon\nu[2(45^\circ - \alpha)]}}$$

Αποτετραγωνισμός
για την εφαπτομένη

$$= \frac{1 - \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 2\alpha)}{1 + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 2\alpha)}}{1 + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 2\alpha)}{1 + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 2\alpha)}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1 - \eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}}{1 + \frac{1 - \eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}}$$

Συμπληρωματικά τόξα

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1 + \eta\mu 2\alpha - 1 + \eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}}{\frac{1 + \eta\mu 2\alpha + 1 - \eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}} \\
&= \frac{2\eta\mu 2\alpha}{2} = \eta\mu 2\alpha
\end{aligned}$$

13.Να δείξετε ότι $4(\sin^6 \alpha + \eta \mu^6 \alpha) = 1 + 3\sin^2 2\alpha$ **Λύση**

$$4(\sin^6 \alpha + \eta \mu^6 \alpha) = 4[(\sin^2 \alpha)^3 + (\eta \mu^2 \alpha)^3]$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 4[(\sin^2 \alpha + \eta \mu^2 \alpha)^3 - 3\sin^2 \alpha \eta \mu^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \eta \mu^2 \alpha)]$$

$$= 4(1 - 3\sin^2 \alpha \eta \mu^2 \alpha)$$

$$= 4 - 12\sin^2 \alpha \eta \mu^2 \alpha$$

$$= 4 - 12 \frac{1 - \sin 2\alpha}{2} \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$$

Αποτετραγωνισμός

$$= 4 - 3(1 - \sin^2 2\alpha)$$

$$= 4 - 3 + 3\sin^2 2\alpha = 1 + 3\sin^2 2\alpha$$

14.Να δείξετε ότι $3 - 4\sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 8\eta \mu^4 \alpha$ **Λύση**

$$3 - 4\sin 2\alpha + \sin 4\alpha = 3 - 4[1 - 2\eta \mu^2 \alpha] + [1 - 2\eta \mu^2 2\alpha]$$

$$= 3 - 4 + 8\eta \mu^2 \alpha + 1 - 2\eta \mu^2 2\alpha$$

$$= 8\eta \mu^2 \alpha - 2(2\eta \mu \alpha \sin \alpha)^2$$

$$= 8\eta \mu^2 \alpha - 2(4\eta \mu^2 \alpha \sin^2 \alpha) =$$

$$= 8\eta \mu^2 \alpha - 8\eta \mu^2 \alpha \sin^2 \alpha =$$

$$= 8\eta \mu^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$= 8\eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \alpha = 8\eta \mu^4 \alpha$$

15.Να αποδείξετε ότι $\frac{1 + \eta \mu \theta}{1 - \eta \mu \theta} = \epsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$ **Λύση**

$$\epsilon \varphi^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \sin \left[2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right]}{1 + \sin \left[2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right]}$$

Αποτετραγωνισμός
εφαπτομένης

$$= \frac{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{1 - \eta \mu \theta}{1 + \eta \mu \theta}$$

Συμπληρωματικά τόξα